



Calcul matriciel

Objectifs :

- Découvrir la notion de matrice
- Savoir calculer une somme de matrices, leur produit par un réel, le produit de deux matrices et l'inverse d'une matrice carrée
- Savoir utiliser ces notions pour résoudre des problèmes (Systèmes linéaires, marches aléatoires...)

Aperçu historique :

Bien que le calcul matriciel proprement dit n'apparaisse qu'au début du XIXe siècle, les matrices, en tant que tableaux de nombres, ont une longue histoire d'applications à la résolution d'équations linéaires. Le texte chinois Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique, écrit vers le IIe siècle av. J.-C., est le premier exemple connu de l'utilisation de tableaux pour résoudre des systèmes d'équations, introduisant même le concept de déterminant.

En 1545, Girolamo Cardano fait connaître cette méthode en Europe en publiant son *Ars Magna*. Le mathématicien japonais Seki Kowa utilise indépendamment les mêmes techniques pour résoudre des systèmes d'équations en 1683. Aux Pays-Bas, Johan de Witt représente des transformations géométriques à l'aide de tableaux dans son livre de 1659, *Elementa curvarum linearum*. Entre 1700 et 1710, Leibniz montre comment utiliser les tableaux pour noter des données ou des solutions, et expérimente plus de 50 systèmes de tableaux à cet effet. En 1750, Gabriel Cramer publie la règle qui porte son nom.

En 1850, le terme de « matrix » (qui sera traduit par matrice) est forgé (sur la racine latine *mater*) par James Joseph Sylvester, qui le voit comme un objet donnant naissance à la famille de déterminants actuellement appelés mineurs, c'est-à-dire les déterminants des sous-matrices obtenues en retirant des lignes et des colonnes. Dans un article de 1851, Sylvester précise : « Dans des articles antérieurs, j'ai appelé matrix un tableau rectangulaire de termes à partir desquels plusieurs systèmes de déterminants peuvent être engendrés, comme issus des entrailles d'un parent commun ».

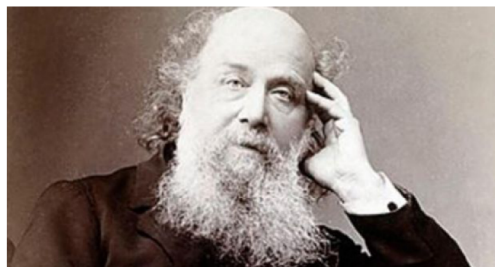
En 1854, Arthur Cayley publie un traité sur les transformations géométriques utilisant les matrices de façon beaucoup plus générale que tout ce qui a été fait avant lui. Il définit les opérations usuelles du calcul matriciel (addition, multiplication et division) et montre les propriétés d'associativité et de distributivité de la multiplication. Jusque-là, l'utilisation des matrices s'était essentiellement limitée au calcul des déterminants ; cette approche abstraite des opérations sur les matrices est révolutionnaire. En 1858, Cayley publie son *A Memoir on the Theory of Matrices*.

Beaucoup de théorèmes sont démontrés au début que pour de petites matrices, puis ont généralisés.

Un mathématicien anglais du nom de Cullis est le premier, en 1913, à utiliser la notation moderne des parenthèses pour représenter les matrices, ainsi que de la notation systématique $A = (a_{i,j})$ pour représenter la matrice dont $a_{i,j}$ est le terme de la i -ème ligne et de la j -ème colonne.



Cramer



Sylvester



Cayley

1. Notion de matrice : définition, notation, vocabulaire

Définition 4.1 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice A de taille (ou de dimensions) $n \times p$ est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes.

Pour tous $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on note a_{ij} le coefficient de la matrice A situé au croisement de la i -ème ligne et de la j -ème colonne.

On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

$M_{n,p}$ est l'ensemble des matrices de taille $n \times p$.

Exemple 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1,8 \end{pmatrix}$$

est une matrice de 2 lignes et 3 colonnes (ou matrice 2×3), et on a par exemple $a_{12} = -1$.

Exemple 4.2 Si dans une base $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace on considère les vecteurs :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

On montre que les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont non coplanaires, forment une famille libre de l'espace, et donc une nouvelle base de celui-ci : $B'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Si l'on écrit côte à côte les coordonnées (composantes) de ces vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de la "nouvelle base" on obtient la matrice ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée matrice de changement de base, ou matrice de passage de B à B' . Elle permet d'obtenir les coordonnées de n'importe quel vecteur dans la "nouvelle base", à partir de ses coordonnées dans l'"ancienne base".

Définition 4.2 • Une **matrice ligne** (ou vecteur-ligne) est une matrice formée d'une seule ligne (matrice $1 \times p$)

- Une **matrice colonne** (ou vecteur-colonne) est une matrice formée d'une seule colonne (matrice $n \times 1$)
- Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice ayant autant de lignes que de colonne (matrice $n \times n$)
- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle**. Si elle est carrée d'ordre n , on la note 0_n .
- Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls hormis certains coefficients de la diagonale est appelée **matrice diagonale**.
- La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 (et tous les autres coefficients sont nuls) est appelée **matrice identité** (ou unité) d'ordre n et est notée I_n .

Exemple 4.3 $(2 \quad \frac{1}{9} \quad -15)$ est une matrice ligne.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

Définition 4.3 Deux matrices A et B sont dites **égales** ssi elles sont de même taille et leurs coefficients de même indice sont respectivement égaux, i.e. pour tous $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $a_{ij} = b_{ij}$.

2. Opération simples sur les matrices

A. Addition et multiplication par un réel

Définition 4.4 Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même taille $n \times p$, leur somme $A + B$ est définie par $A + B = (c_{ij})$, où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pour tous $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Propriété 4.1 Soient A, B, C des matrices de mêmes dimensions.

- $A + B = B + A$: l'addition des matrices est commutative.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$: l'addition des matrices est associative.
- Si 0 est la matrice nulle de même taille que la matrice A , alors :
 $A + 0 = 0 + A = A$, 0 est élément neutre pour l'addition.

Démonstration Toutes ces propriétés découlent immédiatement de la définition des opérations sur les matrices.

Exemple 4.4 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 4-4 \\ -1+6 & 10+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$

Après avoir vérifié que les matrices sont de même taille, on additionne simplement les coefficients un à un.

Définition 4.5 Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times p$, et λ un réel.

La matrice λA est la matrice (b_{ij}) telle que $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, pour tous $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Exemple 4.5 Si $A = \begin{pmatrix} 1,8 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 10$, alors $10A = \begin{pmatrix} 18 & 40 & 20 \\ -10 & 0 & -30 \end{pmatrix}$

On multiplie simplement chaque coefficient de la matrice par λ .

Propriété 4.2 • Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et toutes $A, B \in M_{n,p}$, on a :

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

- La **matrice opposée** à la matrice A , notée $-A$, est la matrice $(-1) \times A$.
On a : $A + (-A) = (-A) + A = 0$.
- La **différence** de deux matrices de même taille $A, B \in M_{n,p}$ est définie par :
 $A - B = A + (-1)B$.
- Les règles de priorité sont les mêmes que pour les réels : $2A + 3B$ signifie $(2A) + (3B)$

Démonstration Toutes ces propriétés découlent immédiatement de la définition des opérations sur les matrices.

Exemple 4.6 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

B. Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 4.6 Soient $n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{1j})$ une matrice ligne $1 \times n$ et $B = (b_{i1})$ une matrice colonne $n \times 1$.

$$\text{Alors } A \times B = (a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,n}) \times \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1} \times b_{1,1} + a_{1,2} \times b_{2,1} + \dots + a_{1,n} \times b_{n,1}$$

$$\text{On a donc } AB = \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,1}.$$

Remarque 4.1 On reconnaît le **produit scalaire** de deux vecteurs.

Exemple 4.7 $(1 \ 4) \times \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \times (-5) + 4 \times 3 = 7$

$(2 \ -3 \ 1) \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + (-3) \times 2 + 1 \times 0 = 2$

C. Multiplication de deux matrices

Définition 4.7 Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, le produit $A \times B$ ou AB est la matrice $C = (c_{i,j})$ de taille $m \times p$ dont le coefficient $c_{i,j}$ est "le produit de la ligne i de A par la colonne j de B ".

Pour tous $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Exemple 4.8 Pour calculer par exemple le produit $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on "pose" souvent l'opération ainsi :

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$6 \times 2 + (-3) \times 5 = -3$
 $1 \times 2 + (-2) \times 5 = -8$, etc...

Propriété 4.3 Soient A , B et C trois matrices telles que les sommes et produits ci-dessous aient un sens (c'est le cas par exemple si toutes les matrices sont carrées de même ordre) Alors :

- $AB \neq BA$ en général : le produit n'est **pas commutatif**.
- $(AB)C = A(BC)$: le produit est **associatif**.
- $A(B+C) = AB+AC$ et $(A+B)C = AC+BC$: le produit est **distributif** par rapport à l'addition.
- Soient A matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et I_n la matrice identité d'ordre n , alors $A \times I_n = I_n \times A = A$. La matrice identité est **neutre** pour la multiplication.

Remarque 4.2 Attention, certaines propriétés très usuelles de la multiplication des nombres (réels ou complexes) ne s'étendent pas à la multiplication des matrices :

- En général, la multiplication des matrices n'est **pas commutative**.
Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$, mais $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
- Si $AB = AC$, **on ne peut pas en déduire** que $B = C$.
Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{pmatrix}$,
et aussi $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{pmatrix}$.
Pourtant $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Une matrice carrée A non nulle telle que pour deux matrices B et C distinctes on ait $A \times B = A \times C$ est dite **non régulière pour la multiplication**.

Dans ce cas, on a $AB = AC \Rightarrow A(B - C) = AB - AC = 0$, où 0 représente la matrice nulle (dont tous les coefficients sont nuls). On dit que la matrice A est un **diviseur de zéro** (ce qui n'existe pas dans les ensembles $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$).

Définition 4.8 Si A est une matrice carrée d'ordre n , on notera $A^2 = A \times A$, et plus généralement A^k le produit de k matrices toutes égales à A ($k \in \mathbb{N}^*$).
Pour $k = 0$, on pose $A^0 = I_n$.

3. Matrices inversibles, systèmes.

A. Matrices inversibles

Définition 4.9 Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} , telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

La matrice A^{-1} est alors unique et est appelée **matrice inverse** de A .

Démonstration Pour démontrer l'unicité de l'inverse, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe deux matrices P et Q distinctes d'ordre n telles que $A \times P = P \times A = I_n$, et $A \times Q = Q \times A = I_n$.

Il vient $A \times P = A \times Q (= I_n)$. En multipliant membre à membre à gauche par P (et non, on ne peut pas "simplifier") :

$P \times (A \times P) = P \times (A \times Q)$, d'où par associativité :

$(P \times A) \times P = (P \times A) \times Q$; or $P \times A = I_n$, donc :

$I_n \times P = I_n \times Q$, i.e. $P = Q$, contredit P et Q distinctes.

Exemple 4.9 $\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est donc inversible, et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$

Remarque 4.3 Si A est inversible, A^{-1} l'est aussi, et l'inverse de A^{-1} est $(A^{-1})^{-1} = A$

Propriété 4.4 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

La matrice A est inversible ssi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ est **non nul**.

Le réel $ad - bc$ est appelé déterminant de la matrice A , et noté $\det(A)$.

Propriété 4.5 Si $ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration On travaille dans l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2 (mais cette propriété se généralise à toutes les matrices carrées).

La matrice nulle n'est pas inversible. En effet, $\forall A \in M_2, A \times 0 = 0 \times A = 0 \neq I_2$.

Supposons donc A non nulle.

- Mq ($ad - bc \neq 0 \Rightarrow A$ inversible).

Notons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Comme $A \neq 0$, on a $B \neq 0$.

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2, \text{ et}$$

$$BA = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2.$$

Donc si on pose $B' = \frac{1}{ad-bc}B$, alors $AB' = B'A = I_2$, donc A est inversible d'inverse B' .

- Démontrons par l'absurde que A inversible $\Rightarrow ad - bc \neq 0$.

Supposons A inversible et $ad - bc = 0$. Alors $AB = 0 \times I_2 = 0$.

En multipliant à gauche par A^{-1} (A inversible), il vient $A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$

Donc $I_2B = B = 0$, donc $B = 0$, contradiction.

B. Application aux systèmes linéaires

Exemple 4.10 On considère le système de 3 équations à 3 inconnues ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 2 \\ -4x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{il peut s'écrire sous la forme : } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}. \text{ Si on}$$

$$\text{note } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{et } Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

le système s'écrit $A \times X = Y$, et l'inconnue est la matrice colonne $X = (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$.

Propriété 4.6 Un système linéaire à n équations et n inconnues $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = Y$, où $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n , et $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ sont des matrices colonnes de taille $n \times 1$.

Si A est inversible, alors le système a une unique solution donnée par $X = A^{-1}Y$.

Démonstration Si A est inversible, alors $AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \Leftrightarrow I_n X = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$